

2026 年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数 学

姓名：_____ 准考证号：_____

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $M = \{x | -1 < x < 3\}$ ， $N = \{x | x \geq 2\}$ ，则 $M \cup N =$ ()

(A) $(2, 3)$

(B) $(-1, +\infty)$

(C) $[2, 3)$

(D) $(-1, 2]$

(2) 已知 $z_1 = 3 - 2i$ ， $z_2 = -1 + 4i$ ，则 $|z_1 + z_2| =$ ()

(A) $2\sqrt{2}$

(B) i

(C) 2

(D) 8

(3) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1 (a > 0)$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{2}{3}x$ ，则 a 的值为 ()

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 9

(4) 已知 $(a - \sqrt{x})^7$ 的展开式中的 x^2 的系数是 280，则 $a =$ ()

(A) 2

(B) -2

(C) 1

(D) -1

(5) 下列函数 $f(x)$ 是奇函数且在定义域上单调递增的是 ()

(A) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

(B) $f(x) = \sin x$

(C) $f(x) = 2^{-x} - 2^x$

(D) $f(x) = \ln \frac{5+x}{5-x}$

(6) 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a} - \vec{b}| = 2$, $\vec{a} = (2, 0)$, 则 $|\vec{b}|$ 的最大值为 ()

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(7) $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是无穷数列, 则“存在常数 M , 使 $a_n \leq M \leq b_n (n=1, 2, 3, \dots)$ ”是“ $a_n \leq b_n (n=1, 2, 3, \dots)$ ”的 ()

(A) 充分不必要条件

(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件

(D) 既不充分也不必要条件

(8) $f(x) = \sin(x + \varphi)$ ($0 < \varphi < 2\pi$), 将 $f(x)$ 向 x 轴正方向平移 3φ 个单位, 得到的函数图像与 $f(x)$ 图像关于 x 轴对称, 则 φ 的取值个数为 ()

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(9) 学校组织高一、高二学生参观甲、乙两地博物馆, 每位学生可自主选择一处前往. 已知高一学生总人数多于高二学生总人数, 前往甲地的全体学生总数多于前往乙地的全体学生总数, 则 ()

(A) 去甲地的高一学生人数多于去乙地的高一学生人数

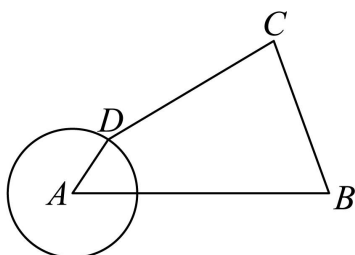
(B) 去甲地的高一学生人数多于去乙地的高二学生人数

(C) 去甲地的高一学生人数不多于去乙地的高二学生人数

(D) 去乙地的高二学生人数不少于去甲地的高二学生人数

(10) 摇杆机械装置, 如图, A, B 为定点, C, D 是动点, $AD = 1$, $CD = 3$, $BC = \frac{5}{2}$, $AB = 4$,

则 $\cos \angle ABC$ 的取值范围 ()



(A) $[\frac{5}{16}, \frac{73}{80}]$

(B) $[-\frac{5}{16}, \frac{73}{80}]$

(C) $[\frac{5}{16}, 1]$

(D) $[\frac{5}{16}, \frac{73}{80})$

第二部分 (非选择题 共 110 分)

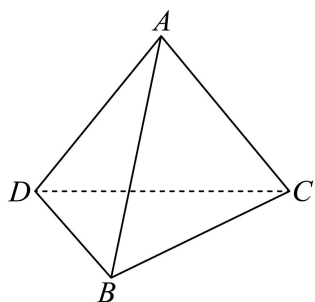
二、填空题: 共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

(11) 已知直线 $ax + y = 0$ 与圆 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ 相切, 则 $a =$ _____.

(12) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_6 = 6a_6 + 30$, 则公差 $d =$ _____, 若 $S_n \leq S_5$ 恒成立, 则符合条件的 a_1 的一个取值为_____.

(13) 音高 y (单位: mel) 与频率 f (单位: Hz) 满足 $y = \lg\left(1 + \frac{f}{700}\right)$, 若 $\lg 2 \leq y < 3\lg 2$, 则 f 的取值范围为_____.

(14) 已知三棱锥 $A-BCD$, $AD = AB = AC = 2\sqrt{2}$, $BD = BC = 2$, $DC = 2\sqrt{3}$, 则它的底面 BCD 的面积为_____, 体积为_____.



(15) 已知 $f(x) = |x^2 - \cos x - c^2|$, 给出下列四个结论:

① $f(x)$ 在 $(-1, 1]$ 上有最小值和最大值

② $c = 0$, $f(x) = 1$ 有 3 个解;

③ $c = 1$, $x \in (-1, 2]$ 时, $f(x)$ 有最大值;

④ $c > 0$, $f(x)$ 与 $y = c$ 有 4 个交点.

其中正确结论的序号是_____.

三、解答题：共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = 2\sin \omega x \cos \varphi + 2\cos \omega x \sin \varphi$ ， $\omega > 0$ ， $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ 。 $f(x)$ 最小正周期为 π ，且

$$f(0) > 0, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

(1) 求 ω 、 φ 的值；

(2) 求 $f(x)$ 的单调递减区间。

(17) (本小题 14 分)

现从全校学生中随机抽取 200 人统计数学成绩，成绩分组及对应人数如下：

成绩分组	[81,94)	[94,107)	[107,120)	[120,135)	[135,150]
人数	40	60	60	32	8

以频率估计概率，完成下列问题：

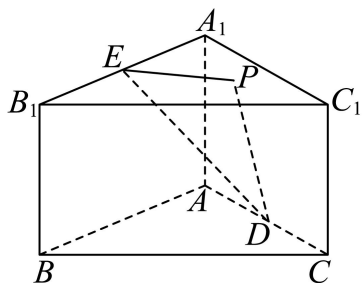
(1) 求数学成绩低于 120 分的概率；

(2) 从学校随机抽取 4 人，求 2 人不低于 120 且 2 人小于 94 的概率；

(3) 每组数据取左端、中间、右端，比较 $s_{\text{左}}^2$ 、 $s_{\text{中}}^2$ 、 $s_{\text{右}}^2$ 的大小关系。

(18) (本小题 13 分)

已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC = 2$ ， $BB_1 = \sqrt{2}$ ， E 、 D 分别为 A_1B_1 、 AC 的中点.



(1) 证明： $DE \parallel$ 平面 BB_1C_1C ；

(2) 点 P 在平面 $A_1B_1C_1$ 内，且 $EP \parallel B_1C_1$ ，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使得 P 唯一确定，求平面 PAD 与平面 PDE 的夹角的余弦值.

条件①： $PA = PD$ ；

条件②： $PA \perp BC$ ；

条件③： $BB_1 \parallel$ 平面 PDE .

注：如果选择条件①、条件②、条件③分别解答，按第一个解答计分.

(19) (本小题 15 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的一个顶点是 $(2, 0)$ ，离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求 E 的方程；

(2) 过点 $A(1, 1)$ ，斜率为 k ($k \neq \pm 1$) 的直线交椭圆 E 于 B 、 C 两点， B 关于 $y = x$ 的对称点为 D ，

DC 交 $y = x$ 于 Q ，若 $|S_{\triangle ABQ} - S_{\triangle ACQ}| = \frac{5}{8}$ ，求 k .

(20) (本小题 15 分)

设函数 $f(x) = x^2 + mx - 4e^{nx-1}$ ($n \in \mathbf{Z}$)，曲线 $y = f(x)$ 在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程为

$$4x + e^2 y + e^2 + 8 = 0.$$

(1) 求 m ， n 的值；

(2) 求 $f(x)$ 的极值点个数；

(3) 求 $y = kx - 1$ ($k > 0$) 与 $f(x)$ 交点个数.

(21) (本小题 15 分)

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 是一个 m 行 n 列的数阵，且数阵中的每一项 $a_{ij} \in \{-1, 1\}$ ，都等于 1 或 -1. 若对

任意 $1 \leq i, p \leq m$ ， $1 \leq j, q \leq n$ ，其中 $i \neq p$ ， $j \neq q$ ，且 $\|i - p\| - \|j - q\| = 2$ ，都有

$a_{ij} + a_{iq} + a_{pj} + a_{pq} = 0$ ，则称数阵 A 具有性质 P .

(1) 判断下列两个数表是否具有性质 P .

$A_1 =$	1	1	-1	1
	-1	1	-1	1
$A_2 =$	1	1	-1	-1
	1	-1	1	-1
	-1	1	-1	1

(2) 在所有具有性质 P 的 5×4 数阵中，1 的个数最多是多少？

(3) 若 $m = n = 6$ ， $a_{11} = 1$ ，且数阵 A 具有性质 P ，证明：对任意 $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，都有

$$a_{ij} = a_{i1}a_{1j}.$$

(考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效)

《2026 年北京高考数学试卷》 参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	A	B	A	D	D	A	C	B	A

1. B

【详解】因为 $M = \{x | -1 < x < 3\}$, $N = \{x | x \geq 2\}$, 则 $M \cup N = \{x | x > -1\} = (-1, +\infty)$.

2. A

【详解】由题意 $z_1 + z_2 = (3-1) + (-2+4)i = 2+2i$,

则 $|z_1 + z_2| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

3. B

【分析】根据渐近线方程结合已知双曲线方程列式计算求解.

【详解】因为双曲线为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1$, 则渐近线为 $y = \pm \frac{2}{a}x$,

又因为渐近线为 $y = \pm \frac{2}{3}x$, 且 $a > 0$, 所以 $a = 3$.

4. A

【详解】二项式 $(a - \sqrt{x})^7$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_7^k a^{7-k} (-\sqrt{x})^k = C_7^k a^{7-k} (-1)^k x^{\frac{k}{2}}$, 其中 $k \in \{0, 1, 2, \dots, 7\}$.

令 $\frac{k}{2} = 2$, 解得 $k = 4$, 则 x^2 项的系数为 $C_7^4 a^{7-4} (-1)^4$.

$\therefore C_7^4 = 35$, $(-1)^4 = 1$, 且已知 x^2 的系数为 280,

$\therefore 35a^3 = 280$, 即 $a^3 = 8$, 解得 $a = 2$.

5. D

【详解】A, 在 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ 中, $x \in \mathbb{R}$, 则 $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} = f(x)$, 函数为偶函数, 故错误;

B, 在 $f(x) = \sin x$ 中, $x \in \mathbb{R}$, 函数为奇函数, 但在定义域上不单调递增, 故错误;

方法一:

C, 在 $f(x) = 2^{-x} - 2^x$ 中, $x \in \mathbb{R}$, 则 $f(-x) = 2^x - 2^{-x} = -f(x)$,

$f'(x) = -2^{-x} \ln 2 - 2^x \ln 2 < 0$, 函数单调递减, 故错误;

D, 在 $f(x) = \ln \frac{5+x}{5-x}$ 中, $\frac{5+x}{5-x} > 0$, 解得 $-5 < x < 5$,

$f(x) = \ln(5+x) - \ln(5-x)$, 则 $f(-x) = \ln(5-x) - \ln(5+x) = -f(x)$ 为奇函数,

$f'(x) = \frac{1}{5+x} + \frac{1}{5-x} = \frac{5-x+(5+x)}{25-x^2} = \frac{10}{25-x^2} > 0$, 即函数在定义域上单调递增, 故正确.

法二:

C, 在 $f(x) = 2^{-x} - 2^x$ 中, $x \in \mathbb{R}$, 则 $f(-x) = 2^x - 2^{-x} = -f(x)$, 为奇函数,

$\because y = 2^{-x}$ 和 $y = -2^x$ 是减函数,

$\therefore$ 函数 $f(x) = 2^{-x} - 2^x$ 单调递减, 故错误;

D, 在 $f(x) = \ln \frac{5+x}{5-x}$ 中, $\frac{5+x}{5-x} > 0$, 解得 $-5 < x < 5$,

$f(x) = \ln(5+x) - \ln(5-x)$, $f(-x) = \ln(5-x) - \ln(5+x) = -f(x)$ 为奇函数,

$\because y = \ln(5+x)$ 和 $y = -\ln(5-x)$ 是增函数, 则 $f(x)$ 为增函数,

$\therefore$ 函数 $f(x) = \ln \frac{5+x}{5-x}$ 单调递增, 故正确.

6. D

【分析】根据向量坐标模长公式计算结合绝对值不等式计算求解.

【详解】因为 $|\vec{a} - \vec{b}| = 2$, 且 $\vec{a} = (2, 0)$, 则 $|\vec{a}| = 2$,

所以 $|\vec{b}| = |\vec{a} - (\vec{a} - \vec{b})| \leq |\vec{a}| + |\vec{a} - \vec{b}| = 2 + 2 = 4$,

所以当 $\vec{a}, \vec{a} - \vec{b}$ 反向时, $|\vec{b}|$ 取最大值为 4.

7. A

【分析】通过验证充分性与必要性, 即可得出结论.

【详解】由题意,

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是无穷数列,

验证充分性:

当存在常数 M , 使 $a_n \leq M \leq b_n (n=1, 2, 3, \dots)$ 时,

$a_n \leq M (n=1, 2, 3, \dots)$, $M \leq b_n (n=1, 2, 3, \dots)$,

$a_n \leq b_n (n=1, 2, 3, \dots)$ 显然成立,

验证必要性:

当 $a_n = n$, $b_n = n^2$ 时, 此时满足 $a_n \leq b_n$,

假设存在常数 M , 使 $a_n \leq M \leq b_n (n=1, 2, 3, \dots)$ 成立,

当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $a_n = n \rightarrow +\infty$, $b_n = n^2 \rightarrow +\infty$,

此时, M 需同时“不小于无限增大的 n ”和“不大于无限增大的 n^2 ”,

但不存在这样的固定常数 M ,

$\therefore$ 当 $a_n \leq b_n$ 时, 无法必然推出“存在常数 M ”, 即必要性不成立,

∴“存在常数 M ，使 $a_n \leq M \leq b_n (n=1,2,3,\dots)$ ”是“ $a_n \leq b_n (n=1,2,3,\dots)$ ”的充分不必要条件.

8. C

【分析】平移后函数为 $\sin(x-2\varphi)$ ，与 $\sin(x+\varphi)$ 关于 x 轴对称可知函数值互为相反数，利用正弦相等得方程，排除不恒成立情形，得到 φ 的取值个数.

【详解】将 $f(x) = \sin(x+\varphi)$ 向右平移 3φ 个单位得

$$g(x) = f(x-3\varphi) = \sin(x-3\varphi+\varphi) = \sin(x-2\varphi).$$

由题意， $g(x)$ 与 $f(x)$ 的图像关于 x 轴对称，即 $g(x) = -f(x)$ 恒成立，

即 $\sin(x-2\varphi) = -\sin(x+\varphi) = \sin(-x-\varphi)$. 分两种情形讨论：

① $x-2\varphi = -x-\varphi+2k\pi \Rightarrow 2x-\varphi = 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ ，对任意 x 不恒成立，舍去；

② $x-2\varphi = \pi - (-x-\varphi) + 2k\pi = \pi + x + \varphi + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ ，化简得

$$-2\varphi = \pi + \varphi + 2k\pi \Rightarrow 3\varphi = -\pi - 2k\pi, \text{ 即 } \varphi = -\frac{\pi}{3}(1+2k).$$

由 $0 < \varphi < 2\pi$ 得 $0 < -\frac{\pi}{3}(1+2k) < 2\pi \Rightarrow k = -1, -2, -3$,

对应 $\varphi = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$ ，因此 φ 的取值个数为 3 个.

9. B

【分析】设出高一、高二去甲、乙地的人数，根据题目条件建立不等关系，即可得出结论.

【详解】由题意，设高一学生去甲地的人数为 A ，去乙地的人数为 B ，

高二学生去甲地的人数为 C ，去乙地的人数为 D ，

∴高一总人数： $A+B$ ，高二总人数 $C+D$ ，前往甲地的学生人数： $A+C$ ，前往乙地的学生人数： $B+D$ ，

∴高一总人数多于高二总人数，前往甲地的全体学生总数多于前往乙地的全体学生总数，

$$\therefore \begin{cases} A+B > C+D \\ A+C > B+D \end{cases}, \text{ 由不等式的性质，两侧分别相加并化简得 } A > D,$$

∴高一学生去甲地的人数多于高二学生去乙地的人数，故 B 正确，A，C，D 均错误.

10. A

【分析】根据边长范围结合余弦定理计算求解范围.

【详解】因为 $AD=1, CD=3$ ，则 $3-1 \leq AC \leq 1+3$ ，即得 $2 \leq AC \leq 4$ ，

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 中, } \cos \angle ABC = \frac{16 + \frac{25}{4} - AC^2}{2 \times 4 \times \frac{5}{2}} = \frac{\frac{89}{4} - AC^2}{20}$$

$$\text{所以 } \frac{25}{80} = \frac{\frac{89}{4} - 4^2}{20} \leq \cos \angle ABC = \frac{\frac{89}{4} - AC^2}{20} \leq \frac{\frac{89}{4} - 2^2}{20} = \frac{73}{80}$$

所以 $\cos \angle ABC$ 的范围为 $\left[\frac{5}{16}, \frac{73}{80}\right]$.

11. 0

【详解】圆 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ 的圆心为 $C(2,2)$, 半径 $r=2$.

由直线 $ax+y=0$ 与圆相切, 则得 $d = \frac{|2a+2|}{\sqrt{a^2+1}} = 2$,

解得 $a=0$.

12. -2 9 (答案不唯一, 满足 $8 \leq a_1 \leq 10$ 即可)

【分析】利用等差数列前 n 项和公式与通项公式, 代入已知等式建立关于公差 d 的方程求解; 由 $S_n \leq S_5$ 恒成立可知 S_5 为前 n 项和的最大值, 结合数列的单调性得到 $a_5 \geq 0$ 且 $a_6 \leq 0$, 代入公差 $d=-2$ 解不等式即可得到 a_1 的取值范围, 选取范围内任意值即可.

【详解】等差数列的前 n 项和公式为 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$, 通项公式为 $a_n = a_1 + (n-1)d$.

$$\because S_6 = 6a_1 + \frac{6 \times 5}{2}d = 6a_1 + 15d, \quad a_6 = a_1 + 5d,$$

$$\therefore 6a_6 = 6(a_1 + 5d) = 6a_1 + 30d.$$

$$\text{由 } S_6 = 6a_6 + 30, \text{ 得 } 6a_1 + 15d = 6a_1 + 30d + 30,$$

消去等式两侧的 $6a_1$, 整理得 $-15d = 30$, 解得 $d = -2$.

$\because d = -2 < 0$, 等差数列 $\{a_n\}$ 为递减数列, 且 $S_n \leq S_5$ 恒成立,

$\therefore S_5$ 为前 n 项和的最大值, 即数列前 5 项非负, 第 6 项及以后非正, 即 $\begin{cases} a_5 \geq 0 \\ a_6 \leq 0 \end{cases}$,

代入通项公式得 $\begin{cases} a_1 + 4d = a_1 - 8 \geq 0 \\ a_1 + 5d = a_1 - 10 \leq 0 \end{cases}$, 解得 $8 \leq a_1 \leq 10$,

取 $a_1 = 9$ 即为符合条件的一个取值.

13. $[700, 4900)$

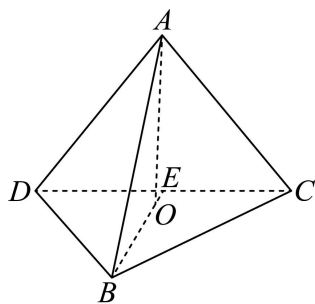
【详解】由题意 $\lg 2 \leq \lg \left(1 + \frac{f}{700}\right) < 3 \lg 2 = \lg 8$, 则 $2 \leq 1 + \frac{f}{700} < 8$, 解得 $700 \leq f < 4900$,

所以 f 的取值范围为 $[700, 4900)$.

14. $\sqrt{3}$ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【分析】先由底面三角形 BCD 的边长求面积; 再由 $AD = AB = AC$, 可知点 A 在底面 BCD 上的投影 O 为 $\triangle BCD$ 的外心, 由此求出三棱锥的高.

【详解】



法一：底面三角形 BCD 中， $BD = BC = 2$ ， $DC = 2\sqrt{3}$ 。

取 DC 中点 E ，连接 BE ，则 $BE \perp DC$ ， $DE = EC = \sqrt{3}$ 。

在 $Rt\triangle BDE$ 中， $BE = \sqrt{BD^2 - DE^2} = \sqrt{4 - 3} = 1$ ，

故底面面积 $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot DC \cdot BE = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3}$ 。

由 $AB = AC = AD = 2\sqrt{2}$ 可知，点 A 在底面 BCD 上的投影 O 为 $\triangle BCD$ 的外心。

在 $\triangle BCD$ 中，由余弦定理得 $\cos \angle DBC = \frac{2^2 + 2^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \times 2 \times 2} = \frac{4 + 4 - 12}{8} = -\frac{1}{2}$ ，

且 $0^\circ < \angle DBC < 180^\circ$ ，故 $\angle DBC = 120^\circ$ 。

由正弦定理， $\triangle BCD$ 的外接圆半径 $R = \frac{DC}{2 \sin \angle DBC} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$ ，

则高 $h = AO = \sqrt{AB^2 - R^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2^2} = \sqrt{8 - 4} = 2$ ，

三棱锥 $A-BCD$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle BCD} \cdot h = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times 2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。

综上，底面面积为 $\sqrt{3}$ ，体积为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。

法二：在 $\triangle BCD$ 中，已知 $BD = BC = 2$ ， $DC = 2\sqrt{3}$ 。

由余弦定理得 $\cos \angle DBC = \frac{2^2 + 2^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \times 2 \times 2} = \frac{4 + 4 - 12}{8} = -\frac{1}{2}$ ，

且 $0^\circ < \angle DBC < 180^\circ$ ，故 $\angle DBC = 120^\circ$ ， $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

所以底面面积 $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot BC \cdot \sin \angle DBC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ 。

由 $AB = AC = AD = 2\sqrt{2}$ 可知，点 A 在底面 BCD 上的投影 O 为 $\triangle BCD$ 的外心。

由正弦定理， $\triangle BCD$ 的外接圆半径 $R = \frac{DC}{2 \sin \angle DBC} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$ ，

则高 $h = AO = \sqrt{AB^2 - R^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2^2} = \sqrt{8 - 4} = 2$ ，

三棱锥 $A-BCD$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle BCD} \cdot h = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times 2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

综上, 底面面积为 $\sqrt{3}$, 体积为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

15. ①②③④

【分析】①, 构造函数 $g(x) = x^2 - \cos x - c^2$ 并求其单调性和奇偶性, 求出 $f(x)$ 的奇偶性, 分 $g(x)$ 在 $(-1, 1]$ 内有零点和 $g(x)$ 在 $(-1, 1]$ 内无零点两种情况讨论, 即可判断; ②, 求出 $f(x)$ 在 c 取任意实数的单调性, 结合零点存在性定理即可求出 $f(x) = 1$ 时 x 的值, 即可判断; ③, 求出 $f(x)$ 在 $(1, 2]$ 上的单调性, 即可判断; ④, 求出 $f(0) = 1 + c^2 > c$, 结合 $f(x)$ 单调性即可得出与直线 $y = c$ 的交点个数, 即可判断.

【详解】由题意,

①在 $g(x) = x^2 - \cos x - c^2$ 中, $g'(x) = 2x + \sin x$, $g(1) = 1 - \cos 1 - c^2$,

$g(-x) = (-x)^2 - \cos(-x) - c^2 = x^2 - \cos x - c^2 = g(x)$, 函数为偶函数,

在 $h(x) = g'(x) = 2x + \sin x$ 中, $h'(x) = 2 + \cos x > 0$,

$\therefore$ 函数 $h(x) = g'(x) = 2x + \sin x$ 单调递增,

$\therefore h(0) = g'(0) = 0 + 0 = 0$,

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时, $h(x) = g'(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $h(x) = g'(x) > 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore$ 函数在 $x = 0$ 处取最小值, $g(0) = 0 - \cos 0 - c^2 = -1 - c^2$,

在 $f(x) = |x^2 - \cos x - c^2|$ 中,

$f(-x) = |(-x)^2 - \cos(-x) - c^2| = |x^2 - \cos x - c^2| = f(x)$, 为偶函数,

当 $g(x)$ 在 $(-1, 1]$ 内有零点时,

即 $\exists x_1 \in (-1, 0)$, $x_2 \in (0, 1)$, 使得 $g(x) = 0$,

此时 $f(x)$ 在 $(-1, x_1]$, $[0, x_2]$ 上单调递减, 在 $[x_1, 0]$, $[x_2, 1]$ 上单调递增,

$f(x_1) = f(x_2) = 0$, $f(0) = -g(0) = 1 + c^2$, $f(1) = g(1) = 1 - \cos 1 - c^2$,

$\therefore 1 + c^2 > 1 - \cos 1 - c^2$,

$\therefore f(0) > f(1)$,

$\therefore f(x)$ 在 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 处取最小值, $f(x)_{\min} = 0$,

在 $x=0$ 处取最大值, $f(x)_{\max}=1+c^2$

当 $g(x)$ 在 $(-1,1]$ 内无零点时, $f(x)=-g(x)=-x^2+\cos x+c^2$,

$f(x)$ 在 $(-1,0]$ 上单调递增, 在 $[0,1]$ 上单调递减,

$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处取得最小值, $f(x)_{\min}=f(1)=-1+\cos 1+c^2$,

在 $x=0$ 处取得最大值, $f(x)_{\max}=f(0)=0+\cos 0+c^2=c^2+1$,

故①正确;

②同①可得推广结论,

在 $f(x)=|x^2-\cos x-c^2|$ 中, $f(0)=|0-\cos 0-c^2|=1+c^2$,

$f(-x)=|(-x)^2-\cos(-x)-c^2|=|x^2-\cos x-c^2|=f(x)$, 为偶函数,

即 $\exists x_1 \in (-\infty, 0)$, $x_2 \in (0, +\infty)$, 使得 $g(x_1)=0$, $g(x_2)=0$,

此时 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_1]$, $[0, x_2]$ 上单调递减, 在 $[x_1, 0]$, $[x_2, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore f(x)$ 在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 处取极小值,

当 $c=0$ 时, $f(x)=|x^2-\cos x|$, $g(x)=x^2-\cos x$, $f(0)=1$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, x_1]$ 上单调递减, $f(x_1)=0$,

$\therefore \exists x_3 \in (-\infty, x_1]$, 使得 $f(x_3)=1$,

$\therefore f(x)$ 在 $[x_2, +\infty)$ 上单调递增, $f(x_2)=0$,

$\therefore \exists x_4 \in [x_2, +\infty)$, 使得 $f(x_4)=1$,

$\therefore$ 当 $x=x_3, x_4, 0$ 时, $f(x)=1$,

$\therefore c=0$, $f(x)$ 有 3 解,

故②正确;

③当 $c=1$ 时,

$f(x)=|x^2-\cos x-1|$, $g(x)=x^2-\cos x-1$, $f(1)=|1-\cos 1-1|=\cos 1>0$,

由①可得, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore g(1)=1-\cos 1-1=-\cos 1<0$, $g(2)=2^2-\cos 2-1=3-\cos 2>0$,

$\therefore \exists x_5(1, 2)$, 使得 $g(x_5)=0$,

∴ 在 $f(x) = |x^2 - \cos x - 1|$ 中, $x \in (1, 2]$,

此时 $f(x)$ 在 $(1, x_5]$ 上单调递减, 在 $[x_5, 2]$ 上单调递增,

∴ $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取最大值,

③正确;

④由②可得,

在 $f(x) = |x^2 - \cos x - c^2|$ 中, $f(0) = 1 + c^2$,

此时 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_1]$, $[0, x_2]$ 上单调递减, 在 $[x_1, 0]$, $[x_2, +\infty)$ 上单调递增,

在 $\omega(x) = 1 + x^2 - x$ 中, $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$,

$1 > 0$, 开口向上,

∴ 函数 $\omega(x) = 1 + x^2 - x > 0$, 即 $1 + x^2 > x$ 恒成立,

∴ $f(0) = 1 + c^2 > c$

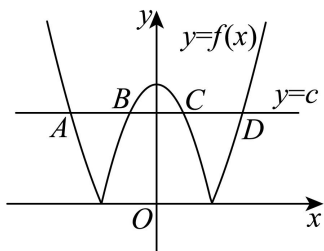
∴ $y = c$ 在 $(0, f(0))$ 下方,

∵ $c > 0$,

∴ $y = c$ 在 x 轴上方,

此时 $y = c$ 与 $f(x)$ 有 4 个交点,

故④正确.



16. (1) $\omega = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$

(2) $\left[k\pi + \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{7\pi}{12}\right] (k \in \mathbf{Z})$

【分析】(1) 利用两角和正弦公式化简可得 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$, 结合正弦型函数周期公式列方程求 ω , 再由

$f(0) > 0, f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ 列式求 φ ;

(2) 根据正弦型函数单调区间求法求结论.

【详解】(1) 因为 $f(x) = 2\sin\omega x \cos\varphi + 2\cos\omega x \sin\varphi$,

所以 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$,

又 $f(x)$ 的最小正周期为 π , $\omega > 0$,

所以 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 所以 $\omega = 2$,

因为 $f(0) > 0, f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$,

所以 $\sin \varphi > 0, 2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{4} + \varphi\right) = 1$,

所以 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \cos \varphi = \frac{1}{2}$,

所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$,

所以 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$,

(2) 令 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 可得 $k\pi + \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{7\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$,

函数 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi + \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{7\pi}{12}\right] (k \in \mathbf{Z})$.

17. (1) 0.8

(2) $\frac{6}{625}$

(3) $s_{\text{左}}^2 < s_{\text{中}}^2 < s_{\text{右}}^2$

【分析】(1) 先求样本中数学成绩低于 120 分的频率, 再由频率估计概率;

(2) 先分别求事件成绩不低于 120 分的概率和事件成绩小于 94 分的概率, 再由独立事件概率乘法公式求结论;

(3) 根据方差公式分别求 $s_{\text{左}}^2, s_{\text{中}}^2, s_{\text{右}}^2$, 比较大小可得结论.

【详解】(1) 由已知样本中数学成绩低于 120 分的频率为 $\frac{40+60+60}{200} = \frac{4}{5}$,

所以数学成绩低于 120 分的概率为 0.8,

(2) 从学校随机抽取一人, 该学生成绩不低于 120 分的概率为 $\frac{1}{5}$,

小于 94 分的概率为 $\frac{1}{5}$,

所以从学校随机抽取 4 人, 2 人不低于 120 且 2 人小于 94 的概率为 $C_4^2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{6}{625}$,

(3) 每组数据取左端的值记为 $x_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$,

每组数据取中间的值记为 $y_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$,

每组数据取右端的值记为 $z_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$,

由已知 $x_1 = 81, x_2 = 94, x_3 = 107, x_4 = 120, x_5 = 135$,

所以 $\bar{x} = \frac{81 \times 40 + 94 \times 60 + 107 \times 60 + 120 \times 32 + 135 \times 8}{200} = 101.1$,

$$s_{\text{左}}^2 = \frac{1}{200} \left[(81-101.1)^2 \times 40 + (94-101.1)^2 \times 60 + (107-101.1)^2 \times 60 + (120-101.1)^2 \times 32 + (135-101.1)^2 \times 8 \right] = 209.49$$

由已知 $y_1 = 87.5$, $y_2 = 100.5$, $y_3 = 113.5$, $y_4 = 127.5$, $y_5 = 142.5$,

$$\text{所以 } \bar{y} = \frac{87.5 \times 40 + 100.5 \times 60 + 113.5 \times 60 + 127.5 \times 32 + 142.5 \times 8}{200} = 107.8,$$

$$s_{\text{中}}^2 = \frac{1}{200} \left[(87.5-107.8)^2 \times 40 + (100.5-107.8)^2 \times 60 + (113.5-107.8)^2 \times 60 + (127.5-107.8)^2 \times 32 + (142.5-107.8)^2 \times 8 \right] = 218.41$$

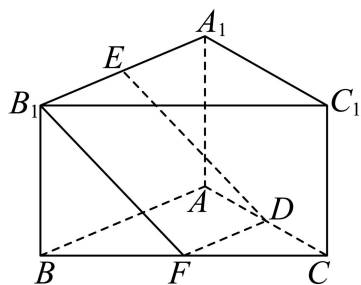
$z_1 = 94$, $z_2 = 107$, $z_3 = 120$, $z_4 = 135$, $z_5 = 150$,

$$\text{所以 } \bar{z} = \frac{94 \times 40 + 107 \times 60 + 120 \times 60 + 135 \times 32 + 150 \times 8}{200} = 114.5,$$

$$s_{\text{右}}^2 = \frac{1}{200} \left[(94-114.5)^2 \times 40 + (107-114.5)^2 \times 60 + (120-114.5)^2 \times 60 + (135-114.5)^2 \times 32 + (150-114.5)^2 \times 8 \right] = 227.65,$$

所以 $s_{\text{左}}^2 < s_{\text{中}}^2 < s_{\text{右}}^2$.

18. (1)解法一: 取 BC 的中点 F , 连接 DF , B_1F ,



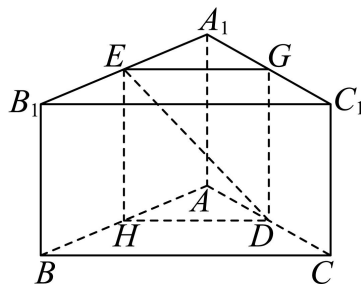
因为 D, F 分别为 AC , BC 的中点, 则 $DF \parallel AB$, 且 $DF = \frac{1}{2}AB$,

又因为 ABB_1A_1 为矩形, 且 E 为 A_1B_1 的中点, 则 $B_1E \parallel AB$, 且 $B_1E = \frac{1}{2}AB$,

可得 $DF \parallel B_1E$, 且 $DF = B_1E$, 可知 DFB_1E 为平行四边形, 则 $DE \parallel B_1F$,

且 $DE \not\subset$ 平面 BB_1C_1C , $B_1F \subset$ 平面 BB_1C_1C , 所以 $DE \parallel$ 平面 BB_1C_1C ;

解法二: 设 A_1C_1 , AB 的中点分别为 G , H , 连接 DG , GE , EH , DH ,



因为 D, G 分别为 AC , A_1C_1 的中点, 则 $DG \parallel CC_1$, $DG \parallel AA_1$,

且 $DG \not\subset$ 平面 BB_1C_1C , $CC_1 \subset$ 平面 BB_1C_1C , 所以 $DG \parallel$ 平面 BB_1C_1C ,

又因为 G, E 分别为 A_1C_1 , A_1B_1 的中点, 则 $GE \parallel B_1C_1$,

且 $GE \not\subset$ 平面 BB_1C_1C , $B_1C_1 \subset$ 平面 BB_1C_1C , 所以 $GE \parallel$ 平面 BB_1C_1C ,

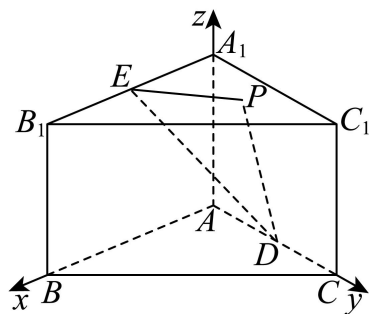
又因为 E, H 分别为 A_1C_1 , AC 的中点, 则 $EH \parallel AA_1$,

可得 $EH \parallel DG$, 可知 E, H, D, G 四点共面,

因为 $DG \cap GE = G$, $DG, GE \subset$ 平面 DEG , 则平面 $DGEH \parallel$ 平面 BB_1C_1C ,

且 $DE \subset$ 平面 $DGEH$, 所以 $DE \parallel$ 平面 BB_1C_1C ;

解法三: 以 A 为坐标原点, AB, AC, AA_1 分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系,



则 $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(0,2,0)$, $A_1(0,0,\sqrt{2})$, $B_1(2,0,\sqrt{2})$, $C_1(0,2,\sqrt{2})$,

且 $D(0,1,0)$, $E(1,0,\sqrt{2})$,

可得 $\overrightarrow{DE} = (1, -1, \sqrt{2})$, $\overrightarrow{BB_1} = (0, 0, \sqrt{2})$, $\overrightarrow{CB} = (2, -2, 0)$,

设平面 BB_1C_1C 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, 则 $\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{BB_1} = \sqrt{2}z_1 = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{CB} = 2x_1 - 2y_1 = 0 \end{cases}$,

令 $x_1 = 1$, 则 $y_1 = 1$, $z_1 = 0$, 可得 $\vec{n}_1 = (1, 1, 0)$,

因为 $\overrightarrow{DE} \cdot \vec{n}_1 = 1 - 1 + 0 = 0$, 即 $\overrightarrow{DE} \perp \vec{n}_1$,

因为 $DE \not\subset$ 平面 BB_1C_1C , 所以 $DE \parallel$ 平面 BB_1C_1C .

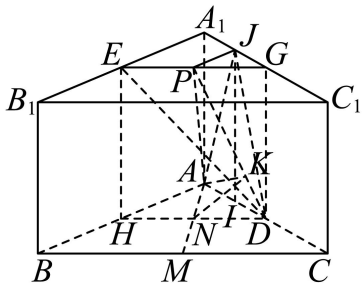
(2) $\frac{2}{3}$

【分析】(1) 解法一: 作辅助线, 可证 $DE \parallel B_1F$, 根据线面平行的判定定理分析证明; 解法二: 作辅助线, 可证平面 $DGEH \parallel$ 平面 BB_1C_1C , 根据面面平行证明线面平行; 解法三: 建立空间直角坐标系, 利用空间向量证明线面平行;

(2) 若选①: 解法一: 作辅助线, 根据线段长相等可知 P 为 EG 的中点, 且平面 PDE 与平面 PAD 的夹角为 $\angle AKN$, 即可得结果; 解法二: 设 $P(a, 1-a, \sqrt{2})$, 根据题意可得 $a = \frac{1}{2}$, 利用空间向量求面面夹角; 若选②: 解法一: 作辅助线, 根据垂直关系分析可知 P 为 EG 的中点, 且平面 PDE 与平面 PAD 的夹角为 $\angle AKN$, 即可得结果; 解法二: 设 $P(a, 1-a, \sqrt{2})$, 根据题意可得 $a = \frac{1}{2}$, 利用空间向量求面面夹角; 若选③: 根据平面 $DGEH \parallel$ 平面 BB_1C_1C 分析可

【详解】(1) 略

若选①: 解法一: 设 AD , AG , EG 的中点分别为 I, J, P ,



因为 $PA = PD$ ，则 $\sqrt{a^2 + (1-a)^2} + 2 = \sqrt{a^2 + (-a)^2} + 2$ ，解得 $a = \frac{1}{2}$ ，即 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$ ，

$$\text{则 } \overrightarrow{AP} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2} \right), \quad \overrightarrow{AD} = (0, 1, 0),$$

$$\text{设平面 } PAD \text{ 的法向量为 } \overrightarrow{n_2} = (x_2, y_2, z_2), \text{ 则 } \begin{cases} \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}x_2 + y_2 + \sqrt{2}z_2 = 0 \\ \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{AD} = y_2 = 0 \end{cases},$$

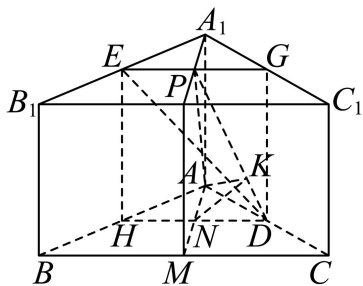
$$\text{令 } x_2 = 2\sqrt{2}, \text{ 则 } y_2 = 0, \quad z_2 = -1, \text{ 可得 } \overrightarrow{n_2} = (2\sqrt{2}, 0, -1),$$

$$\text{因为平面 } DEG // \text{平面 } BB_1C_1C, \text{ 可知平面 } PDE \text{ 的法向量为 } \overrightarrow{n_1} = (1, 1, 0),$$

$$\text{则 } \cos \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2} = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times 3} = \frac{2}{3},$$

所以平面 PDE 与平面 PAD 的夹角余弦值为 $\frac{2}{3}$;

若选②：解法一：取 BC 的中点 M ，连接 AM ，设 $AM \cap DH = N$ ，



因为 $AB = AC$ ，则 $AM \perp BC$ ，

又因为 $BB_1 \perp$ 平面 ABC ， $AM \subset$ 平面 ABC ，则 $AM \perp BB_1$ ，

且 $BC \cap BB_1 = B$ ， $BC, BB_1 \subset$ 平面 BB_1C_1C ，则 $AM \perp$ 平面 BB_1C_1C ，即 $AN \perp$ 平面 BB_1C_1C ，

且平面 $DGEH //$ 平面 BB_1C_1C ，可得 $AN \perp$ 平面 $DGEH$ ，

取 B_1C_1 的中点 Q ，连接 A_1Q ， QM ，可知 $A_1Q // AM$ ，

设 $A_1Q \cap EG = P$ ，可知点 P 为 EG 的中点，

因为 $AM \perp BC$ ， $QM \perp BC$ ，可得 $BC \perp$ 平面 $AMQA_1$ ，则 $AP \perp BC$ ，

因为 $AN \perp$ 平面 $DGEH$ 且 $PD \subset$ 平面 $DGEH$ ，可得 $AN \perp PD$ ，

过点 N 作 $NK \perp PD$ ，

且 $AN \cap NK = N$ ， $AN, NK \subset$ 平面 ANK ，

则 $PD \perp$ 平面 ANK ，可得 $AK \perp PD$ ，

可知平面 PDE 与平面 PAD 的夹角为 $\angle AKN$ ，

$$\text{由题意可知： } AN = ND = PG = \frac{1}{2}AM = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad GD = \sqrt{2},$$

$$\text{则 } PD = \frac{\sqrt{10}}{2}, \quad \sin \angle PDN = \cos \angle PDG = \frac{GD}{PD} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\text{则 } NK = ND \cdot \sin \angle PDN = \frac{2}{\sqrt{10}}, \quad AK = \frac{3}{\sqrt{10}},$$

$$\text{所以平面 } PDE \text{ 与平面 } PAD \text{ 的夹角余弦值为 } \cos \angle AKN = \frac{NK}{AK} = \frac{2}{3};$$

$$\text{解法二: 设 } P(a, 1-a, \sqrt{2}), \text{ 则 } \overrightarrow{AP} = (a, 1-a, \sqrt{2}),$$

$$\text{因为 } AP \perp BC, \text{ 则 } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = a + 1 - a = 0, \text{ 解得 } a = \frac{1}{2}, \text{ 即 } P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2}\right),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AP} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2}\right), \quad \overrightarrow{AD} = (0, 1, 0),$$

$$\text{设平面 } PAD \text{ 的法向量为 } \overrightarrow{n_2} = (x_2, y_2, z_2), \text{ 则 } \begin{cases} \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}x_2 + y_2 + \sqrt{2}z_2 = 0 \\ \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{AD} = y_2 = 0 \end{cases},$$

$$\text{令 } x_2 = 2\sqrt{2}, \text{ 则 } y_2 = 0, \quad z_2 = -1, \text{ 可得 } \overrightarrow{n_2} = (2\sqrt{2}, 0, -1),$$

$$\text{因为平面 } DEG // \text{平面 } BB_1C_1C, \text{ 可知平面 } PDE \text{ 的法向量为 } \overrightarrow{n_1} = (1, 1, 0),$$

$$\text{则 } \cos \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2} = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times 3} = \frac{2}{3},$$

$$\text{所以平面 } PDE \text{ 与平面 } PAD \text{ 的夹角余弦值为 } \frac{2}{3};$$

若选③: 由(1)可知: 平面 $DGEH //$ 平面 BB_1C_1C ,

因为 $P \in EG$, 平面 $DGEH$ 即为平面 PDE , 即平面 $PDE //$ 平面 BB_1C_1C ,

可得 $BB_1 //$ 平面 PDE , 此时点 P 不唯一, 不合题意.

$$19. (1) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$$(2) k = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$$

【分析】(1) 利用顶点坐标及离心率计算即可得;

(2) 设出直线 l_{BC} , 联立曲线方程可得与交点横坐标有关韦达定理, 结合题目所给条件计算可得点 D 、点 Q 坐标, 再利用点到直线距离公式与两点间距离公式可表示出 $S_{\triangle ABQ}$ 与 $S_{\triangle ACQ}$, 结合题目所给条件与韦达定理计算即可得解.

【详解】(1) 由题意可得 $a = 2$, 则 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{4 - b^2}}{2} = \frac{1}{2}$, 即 $b = \sqrt{3}$, 故 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$;

(2) 由题意可得 $l_{BC}: y = k(x-1) + 1$, 设 $B(x_1, y_1)$ 、 $C(x_2, y_2)$,

由 B 关于直线 $y = x$ 对称的点为 D , 则 $D(y_1, x_1)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = k(x-1) + 1 \end{cases}, \text{ 消去 } y \text{ 得: } (4k^2 + 3)x^2 - 8k(k-1)x + 4k^2 - 8k - 8 = 0,$$

由 $\frac{1^2}{4} + \frac{1^2}{3} = \frac{7}{12} < 1$, 故 A 在椭圆内部, 故 $\Delta > 0$ 恒成立, 有 $x_1 + x_2 = \frac{8k(k-1)}{4k^2+3}$ 、 $x_1 x_2 = \frac{4k^2-8k-8}{4k^2+3}$,

$$\text{则 } y_1 + y_2 = k(x_1 - 1) + 1 + k(x_2 - 1) + 1 = k(x_1 + x_2) - 2k + 2,$$

$$y_1 y_2 = [k(x_1 - 1) + 1] \cdot [k(x_2 - 1) + 1] = k^2 x_1 x_2 + (k - k^2)(x_1 + x_2) + k^2 - 2k + 1,$$

$$l_{CD}: y = \frac{y_2 - x_1}{x_2 - y_1}(x - y_1) + x_1, \text{ 联立 } \begin{cases} y = \frac{y_2 - x_1}{x_2 - y_1}(x - y_1) + x_1, \\ y = x \end{cases},$$

$$\text{则 } x = \frac{y_2 - x_1}{x_2 - y_1}(x - y_1) + x_1, \text{ 即 } (x_2 - y_1)x = (y_2 - x_1)x - (y_2 - x_1)y_1 + x_1(x_2 - y_1),$$

$$\text{整理得 } x = \frac{x_1 x_2 - y_1 y_2}{(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)}, \text{ 即 } Q\left(\frac{x_1 x_2 - y_1 y_2}{(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)}, \frac{x_1 x_2 - y_1 y_2}{(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)}\right),$$

$$\text{点 } B \text{ 到直线 } AQ \text{ 的距离 } d_1 = \frac{|x_1 - y_1|}{\sqrt{2}}, \text{ 点 } C \text{ 到直线 } AQ \text{ 的距离 } d_2 = \frac{|x_2 - y_2|}{\sqrt{2}},$$

$$\text{又 } |AQ| = \sqrt{2}|x_Q - 1|, \text{ 则 } S_{\triangle ABQ} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}|x_Q - 1| \cdot \frac{|x_1 - y_1|}{\sqrt{2}}, \quad S_{\triangle ACQ} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}|x_Q - 1| \cdot \frac{|x_2 - y_2|}{\sqrt{2}},$$

$$\text{故 } |S_{\triangle ABQ} - S_{\triangle ACQ}| = \frac{\sqrt{2}}{2}|x_Q - 1| \cdot \left| \frac{|x_1 - y_1|}{\sqrt{2}} - \frac{|x_2 - y_2|}{\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{2}|x_Q - 1| \cdot ||x_1 - y_1| - |x_2 - y_2||$$

$$= \frac{1}{2} \left| \frac{x_1 x_2 - y_1 y_2}{(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)} - 1 \right| \cdot |(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)| = \frac{1}{2} |(x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)|$$

$$= \frac{1}{2} |(x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)|$$

$$= \frac{1}{2} |x_1 x_2 - k^2 x_1 x_2 - (k - k^2)(x_1 + x_2) - k^2 + 2k - 1 - (x_1 + x_2) + k(x_1 + x_2) - 2k + 2|$$

$$= \frac{1}{2} |(1 - k^2)x_1 x_2 - (1 - k^2)(x_1 + x_2) - k^2 + 1|$$

$$= \frac{1}{2} \left| \frac{(1 - k^2)(4k^2 - 8k - 8)}{4k^2 + 3} - \frac{(1 - k^2)8k(k - 1)}{4k^2 + 3} - k^2 + 1 \right|$$

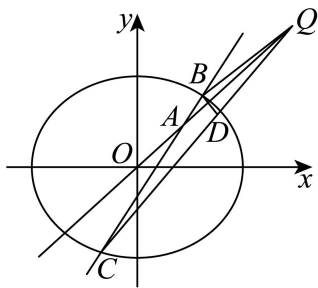
$$= \frac{1}{2} \left| \frac{4k^2 - 8k - 8 - 4k^4 + 8k^3 + 8k^2}{4k^2 + 3} - \frac{8k^2 - 8k - 8k^4 + 8k^3}{4k^2 + 3} + \frac{-4k^4 - 3k^2 + 4k^2 + 3}{4k^2 + 3} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \left| \frac{5k^2 - 5}{4k^2 + 3} \right| = \frac{5}{8},$$

即有 $|5k^2 - 5| = 5k^2 + \frac{15}{4}$, 若 $k^2 > 1$, 则 $5 = \frac{15}{4}$, 无解, 不符;

则 $k^2 < 1$, 有 $5 - 5k^2 = 5k^2 + \frac{15}{4}$, 解得 $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$;

故 $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$.



20. (1) $m=2$ 、 $n=1$

(2) $f(x)$ 有两个极值点

(3) 交点个数为1

【分析】(1) 借助导数的几何意义可得 $f'(-1) = -4e^{-2}$ 、 $f(-1) = -1 - 4e^{-2}$ ，计算即可得解；

(2) 求导得到 $f'(x)$ 后，再利用导数研究函数 $f'(x)$ 单调性，即可得 $f'(x)$ 变号零点个数，即可得 $f(x)$ 极值点个数；

(3) 构造函数 $h(x) = x^2 + 2x - 4e^{x-1} - kx + 1$ ，利用导数计算可得 $h'(x) = 2g(x) - k$ ，再分 $k > 2 - 2\ln 2$ 及 $0 < k \leq 2 - 2\ln 2$ 进行讨论，当 $k > 2 - 2\ln 2$ ，结合 (2) 中所得可得 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，结合零点存在性定理即可得 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上零点个数，即可得 $y = kx - 1 (k > 0)$ 与 $f(x)$ 交点个数；当 $0 < k \leq 2 - 2\ln 2$ 时，可得 $h'(x) = 0$ 有两个实根，分别设为 x_3 、 x_4 ，且 $x_3 < x_4$ ，则得 $h(x)$ 单调性，计算可得 $h(x_3) < 0$ 、 $h(x_4) < 0$ ，再利用零点存在性定理即可得 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上零点个数，即可得 $y = kx - 1 (k > 0)$ 与 $f(x)$ 交点个数。

【详解】(1) $f'(x) = 2x + m - 4ne^{nx-1}$ ，则 $f'(-1) = -2 + m - 4ne^{-n-1} = -4e^{-2}$ ，

$$f(-1) = 1 - m - 4e^{-n-1} = \frac{-e^2 - 8 + 4}{e^2} = -1 - 4e^{-2}，\text{ 又 } n \in \mathbf{Z}，\text{ 解得 } \begin{cases} m=2 \\ n=1 \end{cases}；$$

(2) 由 (1) 得 $f(x) = x^2 + 2x - 4e^{x-1}$ ，则 $f'(x) = 2x + 2 - 4e^{x-1} = 2(x + 1 - 2e^{x-1})$ ，

令 $g(x) = x + 1 - 2e^{x-1}$ ，则 $g'(x) = 1 - 2e^{x-1}$ ，

令 $g'(x) = 1 - 2e^{x-1} = 0$ ，解得 $x = 1 - \ln 2$ ，

则当 $x \in (-\infty, 1 - \ln 2)$ 时， $g'(x) > 0$ ，当 $x \in (1 - \ln 2, +\infty)$ 时， $g'(x) < 0$ ，

故 $g(x)$ 在 $(-\infty, 1 - \ln 2)$ 上单调递增，在 $(1 - \ln 2, +\infty)$ 上单调递减，

又 $g(1 - \ln 2) = 1 - \ln 2 + 1 - 2e^{-\ln 2} = 1 - \ln 2 > 0$ ，

$g(-1) = -1 + 1 - 2e^{-2} = -2e^{-2} < 0$ ， $g(1) = 1 + 1 - 2e^0 = 0$ ，

故存在 $x_1 \in (-1, 1 - \ln 2)$ ，使得 $f'(x_1) = 0$ ，且有 $f'(1) = 0$ ，

则当 $x \in (-\infty, x_1) \cup (1, +\infty)$ 时， $f'(x) < 0$ ，当 $x \in (x_1, 1)$ 时， $f'(x) > 0$ ，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 、 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(x_1, 1)$ 上单调递增,

故 $f(x)$ 有两个极值点;

(3) 令 $x^2 + 2x - 4e^{x-1} = kx - 1$, 则 $x^2 + 2x - 4e^{x-1} - kx + 1 = 0$,

令 $h(x) = x^2 + 2x - 4e^{x-1} - kx + 1$, 则 $h'(x) = 2x + 2 - 4e^{x-1} - k = 2g(x) - k$;

若 $k \geq 2g(1 - \ln 2) = 2 - 2\ln 2$, 则 $h'(x) \leq 0$ 恒成立 (不恒为零),

故 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 又 $h(0) = -4e^{-1} + 1 = 1 - \frac{4}{e} < 0$,

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$, 故 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有唯一零点,

即 $y = kx - 1 (k > 0)$ 与 $f(x)$ 有唯一交点;

若 $0 < k < 2 - 2\ln 2$ 时, $2g(x) - k = 0$ 有两个实根,

设这两个实根分别为 x_3 、 x_4 , 且 $x_3 < x_4$, 则 $x_3 \in (x_1, 1 - \ln 2)$ 、 $x_4 \in (1 - \ln 2, 1)$,

则当 $x \in (-\infty, x_3) \cup (x_4, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, 当 $x \in (x_3, x_4)$ 时, $h'(x) > 0$,

故 $h(x)$ 在 $(-\infty, x_3)$ 、 $(x_4, +\infty)$ 上单调递减, 在 (x_3, x_4) 上单调递增,

故 $h(x_3)$ 为 $h(x)$ 的极小值, $h(x_4)$ 为 $h(x)$ 的极大值, 且 $h(x_3) < h(x_4)$,

由 $h'(x_4) = 2x_4 + 2 - 4e^{x_4-1} - k = 0$, 则 $4e^{x_4-1} = 2x_4 + 2 - k$,

则 $h(x_4) = x_4^2 + 2x_4 - 4e^{x_4-1} - kx_4 + 1 = x_4^2 + 2x_4 - (2x_4 + 2 - k) - kx_4 + 1$

$= x_4^2 - kx_4 + k - 1 = (x_4 - 1)[x_4 - (k - 1)]$,

由 $0 < k \leq 2 - 2\ln 2$, 则 $k - 1 \leq 1 - 2\ln 2 < x_4$,

则有 $x_4 - 1 < 0$ 、 $x_4 - (k - 1) > 0$,

故 $h(x_4) < 0$, 则 $h(x_3) < h(x_4) < 0$,

又 $x \rightarrow -\infty$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$, 故 $h(x)$ 在 $(-\infty, x_3)$ 上存在唯一零点,

即 $y = kx - 1 (k > 0)$ 与 $f(x)$ 有唯一交点;

综上所述: $y = kx - 1 (k > 0)$ 与 $f(x)$ 交点个数为 1.

21. (1) 数表 A_1 不具有性质 P , 数表 A_2 具有性质 P ;

(2) 12

(3) 性质 P 中的四个数都属于 $\{-1, 1\}$, 且四个数的和为 0, 所以其中恰有两个 1 和两个 -1.

因此，对任意满足性质 P 下标条件的四个位置，都有 $a_{ij}a_{iq}a_{pj}a_{pq}=1$ ①，

对 $i=1,2,\dots,6$ ， $j=1,2,\dots,5$ ，令 $c_{ij}=a_{ij}a_{i,j+1}$ 。

先取行距为 3、列距为 1 的矩形。

由①，对 $i=1,2,3$ 及 $j=1,2,\dots,5$ ，有 $c_{ij}c_{i+3,j}=1$ 。

由于 $c_{ij}, c_{i+3,j} \in \{-1,1\}$ ，所以 $c_{i+3,j}=c_{ij}$ ②，

下面比较第 1 行与第 2 行的 c 值。

对 $j=1,2,3,4$ ，取第 1、5 行和第 j 、 $j+2$ 列。

此时行距为 4，列距为 2，由①得 $(c_{1j}c_{1,j+1})(c_{5j}c_{5,j+1})=1$ 。

由②知 $c_{5j}=c_{2j}$ ，故 $(c_{1j}c_{2j})(c_{1,j+1}c_{2,j+1})=1$ ③，

令 $d_j=c_{1j}c_{2j}$ 。

则由③得 $d_jd_{j+1}=1$ ，所以 $d_1=d_2=d_3=d_4=d_5$ 。

再取第 1、2 行和第 1、4 列。

此时行距为 1，列距为 3，由①得 $(c_{11}c_{12}c_{13})(c_{21}c_{22}c_{23})=1$ ，即 $d_1d_2d_3=1$ 。

由于 $d_1=d_2=d_3$ 且 $d_1 \in \{-1,1\}$ ，所以 $d_1=1$ 。

从而 $c_{1j}=c_{2j}$ ($j=1,2,\dots,5$) ④，

同理，取第 2、6 行和相距 2 的两列，再取第 2、3 行和相距 3 的两列，可得 $c_{2j}=c_{3j}$ ($j=1,2,\dots,5$) ⑤，

结合②、④、⑤，可知对于每个 $j=1,2,\dots,5$ ，都有 $c_{1j}=c_{2j}=\dots=c_{6j}$ ⑥，

当 $j=1$ 时，由 $a_{11}=1$ ，显然有 $a_{i1}=a_{i1}a_{11}$ 。

当 $j \geq 2$ 时，由⑥，由中间因子均成对出现，且 $a_{ik}^2=1$ ，有 $a_{i1}a_{ij}=(a_{i1}a_{i2})(a_{i2}a_{i3})\dots(a_{i,j-1}a_{ij})=c_{i1}c_{i2}\dots c_{i,j-1}$ 。

再由⑥， $c_{i1}c_{i2}\dots c_{i,j-1}=c_{11}c_{12}\dots c_{1,j-1}=a_{11}a_{1j}=a_{1j}$ 。

两边同乘 a_{i1} ，并利用 $a_{i1}^2=1$ ，得 $a_{ij}=a_{i1}a_{1j}$ 。

命题得证。

【分析】(1) 性质 P 的下标约束条件，选取符合要求的四元组代入验证，若存在不满足和为 0 的组合则不具有性质 P ，反之则具有性质 P 。

(2) 由性质 P 的和约束推导行列符号的等价乘积约束，确定每行 1 的最大可行数量，结合行之间的符号交替规律计算总 1 的个数的上界，构造符合条件的实例证明上界可达。

(3) 利用性质 P 的乘积等价性质，结合 $a_{11}=1$ 的初始条件，先验证差为 2 的下标组合，再通过递推推广到所有下标

i, j , 完成证明.

【详解】(1) 对于 A_1 , 只有两行, 所以行距只能为1. 要满足|行距-列距|=2, 列距只能为3. 取第1、2行和第1、4列, 四个顶点之和为 $1+1+(-1)+1=2 \neq 0$. 所以 A_1 不具有性质 P .

对于 A_2 , 行距为1时, 列距只能为3; 行距为2时, 不存在符合条件的列距. 因此, 只需检验相邻两行与第1、4列组成的两个矩形. 第1、2行对应的四个顶点之和为 $1+(-1)+1+(-1)=0$.

第2、3行对应的四个顶点之和为 $1+(-1)+(-1)+1=0$. 所以 A_2 具有性质 P .

(2) 设第 i 行元素之和为 $s_i = \sum_{j=1}^4 a_{ij}$. 先考察第1行与第4行. 令 $x_j = a_{1j} + a_{4j}$ ($j=1, 2, 3, 4$). 对 $j=1, 2, 3$, 第1、4行的行距为3, 第 j 、 $j+1$ 列的列距为1, 由性质 P 得 $x_j + x_{j+1} = 0$. 因此 $x_2 = -x_1$, $x_3 = x_1, x_4 = -x_1$, 从而 $s_1 + s_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. 同理, 考察第2行与第5行, 可得 $s_2 + s_5 = 0$. 所以整个数阵所有元素之和为 $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 = s_3 \leq 4$. 设数阵中1的个数为 N . 数阵中共有20个数, 因此-1的个数为 $20 - N$, 从而 $N - (20 - N) \leq 4$. 解得 $N \leq 12$.

下面说明12可以达到. 取 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 该数阵中共有12个1. 对于 5×4 数阵, 可能的行距、列距组合只有

$(1, 3), (3, 1), (4, 2)$. 当行距、列距为 $(1, 3)$ 时, 相邻两行第1、4列的四个数之和均为0; 当行距、列距为 $(3, 1)$ 时, 第1、4行以及第2、5行对应各列的元素之和均为0; 当行距、列距为 $(4, 2)$ 时, 第1、5行与相距2的两列组成的四个数之和也为0. 所以该数阵具有性质 P , 且1的个数为12. 因此, 1的个数最多为12.

(3) 略